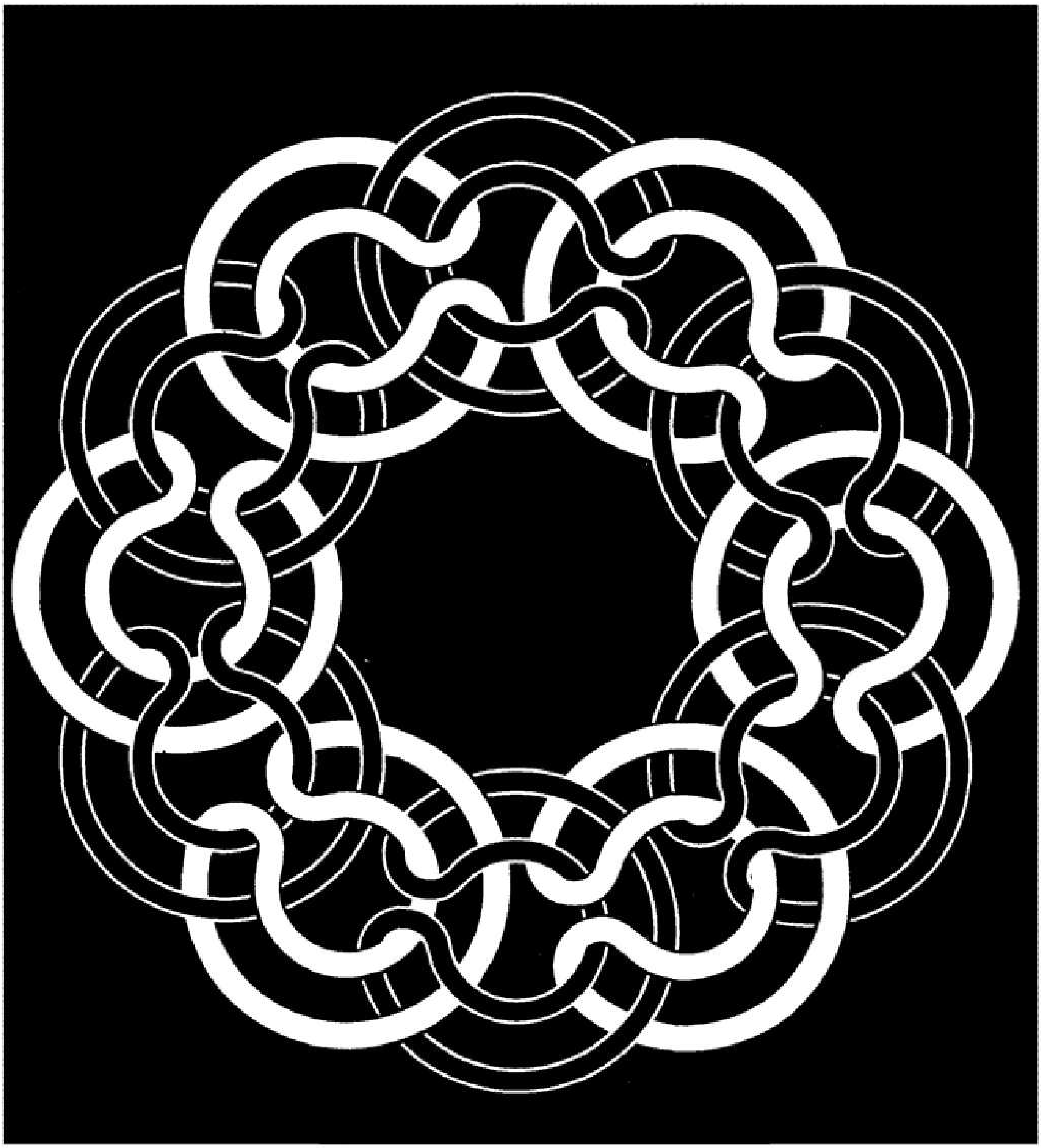
ISSN 0130-2221

КВАНТ

12
1980

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР



В. Залгаллер,
С. Залгаллер

Венгерский шарнирный кубик

В Венгерской Народной Республике распространена занятная математическая головоломка, созданная в 1975 г. венгерским архитектором, профессором Эрнё Рубиком. Ее внешний вид показан на четвертой странице обложки: это пластмассовый куб, разбитый на 27 конгруэнтных кубиков. Внутренний кубик удален, а 26 наружных кубиков с помощью специальных выступов сцеплены так, что любая плитка из 9 кубиков, прилегающих к одной грани куба, может быть повернута в любую сторону на 90°. (Начало двух таких поворотов изображено на рисунке 1.) После поворота на 90° вся система сохраняет прежнюю свободу вращений: снова любую плитку в любую сторону можно повернуть в ее плоскости на 90°.

Об устройстве шарнирного скрепления этих кубиков можно написать отдельную статью — сейчас же мы будем обсуждать другой вопрос.

Первоначально каждая из граней большого куба была окрашена в свой цвет (красный, оранжевый, желтый, зеленый, синий, белый). После ряда случайно выбранных вращений окраска граней куба становится пестрой: на грани присутствуют клетки разных цветов. Головоломка состоит в том, чтобы, получив в руки такой пестрый куб, добиться с помощью вращений *правильной* расстановки кубиков, то есть такой расстановки, при которой каждая грань куба снова будет одного цвета.

Задача эта совсем не проста. Не вооруженному теорией человеку, даже способному, редко удается сразу собрать более одной грани. Число расстановок кубиков, которые можно получить (подсчитано, что их $N = 43\,252\,003\,274\,489\,856\,000$), делает ее недоступной для перебора даже на ЭВМ. Заметим, впрочем, что не любая расстановка может быть получена вращениями плиток куба: если разрешить разборку куба на составляющие его 26 кубиков, то можно составить $12 \cdot N = 529\,024\,039\,393\,878\,272\,000$ разных расстановок (см. задачу 8 из Добавления).

В настоящей заметке мы предлагаем читателю правила (они не являются самыми экономными по числу вращений), позволяющие от любой из N возможных расстановок кубиков вернуться к их правильной расстановке.

Описание вращений

Чтобы изложить предлагаемые правила, условимся сначала о терминологии.

Будем называть *центральными* кубики, стоящие в центрах граней куба. Каждый центральный кубик всегда (при любых вращениях) остается центральным и смотрит наружу одной клетки определенного цвета.

Поскольку нас интересуют не изменения положения всего куба в пространстве, а лишь изменения взаимного расположения его частей, мы будем считать его положение в пространстве фиксированным. Это озна-

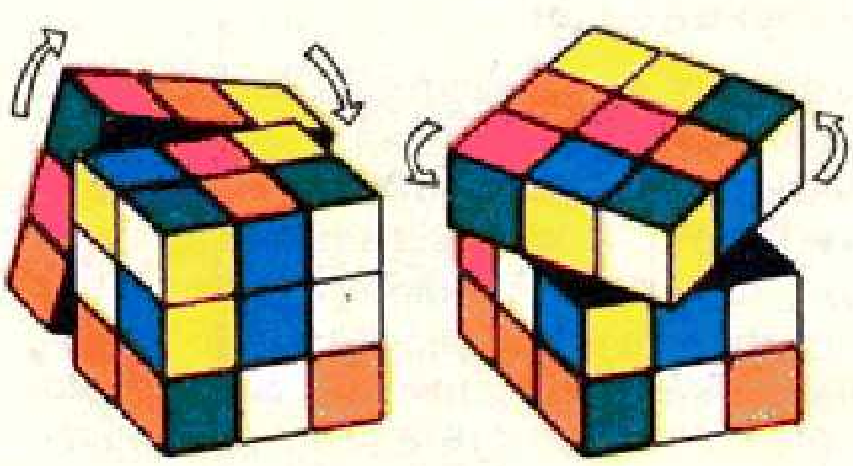


Рис. 1.

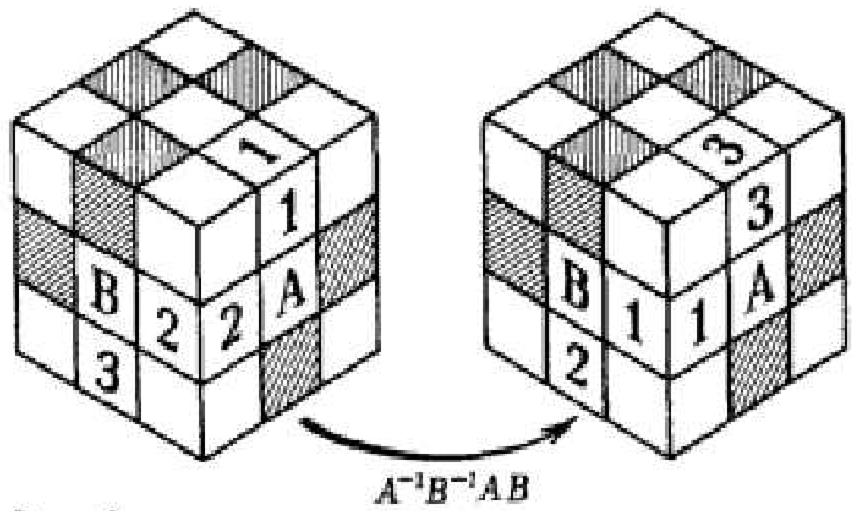


Рис. 2.

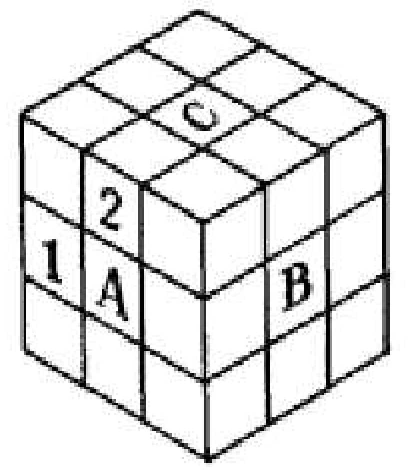


Рис. 3.

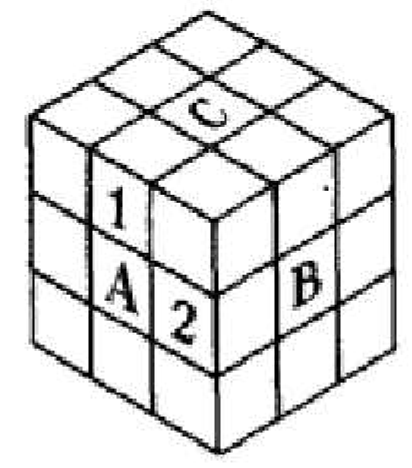


Рис. 4.

чает, что положение всех центральных кубиков в пространстве остается неизменным. Это означает также, что из девяти плоскостей куба мы будем поворачивать только шесть.

Если на рисунке некоторая центральная клетка отмечена буквой A, то поворот (не «средней») плитки, содержащей эту клетку, на 90° по часовой стрелке мы будем обозначать через A, а поворот этой же плитки на 90° против часовой стрелки будем обозначать через A^{-1}. Очевидно, $A^{-1}A^{-1}A^{-1}=A$ и $A^2=A^{-2}$, где $A^2=A\ \ A$ и $A^{-2}=A^{-1}\ \ A^{-1}$.

Кубики, содержащие среднюю часть ребра большого куба, будем называть *средними*. Средний кубик всегда остается средним и смотрит наружу двумя клетками определенного цвета. Для каждой пары цветов (кроме тех пар цветов, которыми первоначально были раскрашены противоположные грани куба) имеется единственный средний кубик с клетками этих цветов.

Угловыми назовем кубики, занимающие в составе куба угловые места. Каждый угловой кубик всегда остается угловым и смотрит наружу тремя клетками, окрашенными в разные цвета. Сочетание этих трех цветов у каждого из угловых кубиков свое.

Основные этапы

Заманчивый, на первый взгляд, путь: постепенно увеличивая пятно одноцветных клеток, получить одноцветную грань, а потом взяться за другую — видимо, приводит лишь к непреодолимым трудностям. Не справившись с головоломкой, ее нередко портят — от злости или из любопытства к устройству шарнира. Мы надеемся, что предлагаемый ниже способ решения сделает головоломку доступной, но и он требует определенных усилий при реализации.

Предлагаемые действия разобьем на четыре больших этапа. Мы уже договорились, что в ходе решения головоломки центральные кубики не меняют своего положения в пространстве. Что касается средних кубиков, то каждый из них должен в процессе решения занять вполне определенное место: оказаться на ребре между двумя «своими» гранями куба, то есть теми гранями, чьи центральные клетки такого же цвета, как две клетки данного среднего кубика. Кроме того, он должен быть правильно повернут: его цветные клетки должны прилегать к центральным клеткам того же цвета. Совершенно аналогично обстоит дело с угловыми кубиками: у каждого из них есть свое место (на стыке трех граней с центральными клетками его цветов) и единственный правильный разворот. В соответствии с этим порядок наших действий будет следующим:

Этап 1: *поставить на нужные места все средние кубики.*

Этап 2: *правильно повернуть на своих местах все средние кубики.*

Этап 3: *поставить на нужные места все угловые кубики.*

Этап 4: *правильно повернуть все угловые кубики.*

Каждый из этапов мы будем выполнять только после того, как предыдущий этап полностью закончен. При этом очередной этап будем выполнять так, чтобы после его завершения оказались не нарушенными достижения предшествующих этапов.

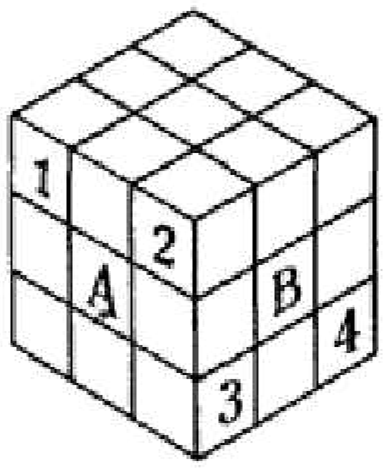


Рис. 5.

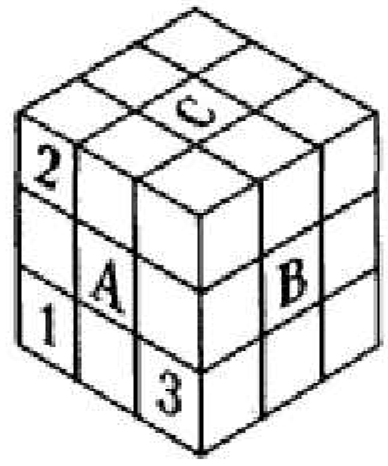


Рис. 6.

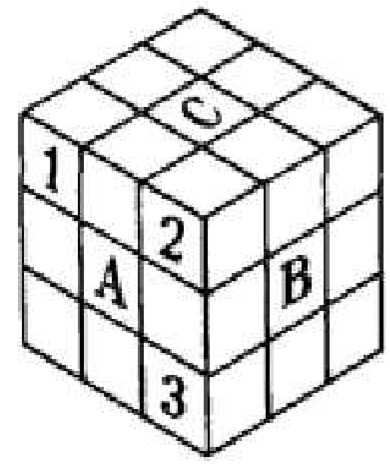


Рис. 7.

После выполнения второго этапа на каждой из граней куба образуется крест из пяти клеток одного цвета. После выполнения четвертого этапа задача окажется решенной — каждая грань куба станет одноцветной.

Невозможные положения

Достаточность предлагаемых ниже «комбинаций» для выполнения перечисленных этапов опирается на три свойства рассматриваемого шарнирного куба. В рамках этой статьи мы будем считать эти свойства экспериментальными фактами. Их можно, однако, доказать, решив задачи, придуманные В. Дубровским (см. Приложение).

Если кубики выведены из правильного положения только допустимыми вращениями (а не разборкой и новой сборкой всего устройства или перекраской граней), то не может возникнуть положение, при котором:

I. *все средние кубики стоят на своих местах и только один из них повернут неправильно;*

II. *все средние кубики и стоят, и повернуты правильно, а все угловые кубики, кроме двух, стоят (в любых положениях) на своих местах;*

III. *все средние кубики и стоят, и повернуты правильно, а все угловые кубики стоят на своих местах и только один из них повернут неправильно.*

Предварительные комбинации

Чтобы привыкнуть к тому, как записываются повороты, мы сначала рассмотрим несколько важных для дальнейшего стандартных комбинаций.

Первая комбинация $A^{-1}BA$ (в отличие от школьного учебника, это будет означать, что сначала совершается поворот A^{-1}, затем B, затем A) называется *сопряжением* элемента B с помощью элемента A. На рисунке 2 показано, как эта комбинация позволила собрать белую грань целиком, поставив белую клетку 1 на место желтой 2.

Вторая комбинация $A^{-1}B^{-1}AB$ называется *коммутатором* элементов A, B. Проверьте, что в положении куба, изображенном на рисунке 2, серые клетки остаются на месте, а средние кубики 1, 2, 3 *циклически переставляются*, то есть переходят по схеме $1 \to 3 \to 2 \to 1$. Проследите еще, как переставляют средние кубики комбинации $ABA^{-1}B^{-1}$, $AB^{-1}A^{-1}B$, $A^2B^2A^2B^2$, $A^2BA^2B^{-1}$, $A^2B^{-1}A^2B$, $AB^2A^{-1}B^2$, $A^{-1}B^2AB^2$ — коммутаторы других поворотов (каких?).

Этап 1: средние кубики — на место

Комбинация из семи поворотов

$$K_1 = A^{-1}C^{-1}B^{-1}A^{-1}BAC$$

взаимно переставляет местами средние кубики 1, 2 (рис. 3) и сохраняет местоположение остальных средних кубиков (проверьте!*).

Комбинация K_1 фактически позволяет менять местами любые два средних кубика. Если они не прилегали к одной грани куба или не были на ней соседними, то всегда можно вспомогательными поворотами (запомнив эти повороты по цвету центра поворачиваемой плитки) привести желаемые кубики в положение 1, 2 (рис. 3), переставить их комбинацией K_1, а затем, в обратной очередности и обратных направлениях повторить сделанные вспомогательные повороты.

*) Если у вас нет экземпляра игрушки, советуем нарисовать развертку куба (чернилами на хорошем листе бумаги) и, пользуясь карандашом и ластиком, следить за передвижением клеток на развертке.

Очевидно, попарные перестановки средних кубиков позволяют осуществить этап 1: поставить на свои места все средние кубики.

Этап 2: повернем средние кубики

Комбинация из двенадцати поворотов

$$K_2=(AB^{-1}A^{-1}B)(BC^{-1}B^{-1}C)(CA^{-1}C^{-1}A)$$

одновременно поворачивает в своих гнездах кубики 1, 2 (рис. 4) и не меняет ни местоположений, ни поворотов остальных средних кубиков (проверьте!).

Комбинация K_2 позволяет повернуть на своих местах любые два средних кубика. Действительно, если они не прилегали к одной грани куба или не были на ней соседними, то всегда можно вспомогательными поворотами (запомнив эти повороты по цвету центра поворачиваемой плитки) привести желаемые два кубика в положение 1, 2 (рис. 4), повернуть их комбинацией K_2, а затем, в обратной очередности и в обратных направлениях повторить вспомогательные повороты.

Попарные совместные повороты средних кубиков позволяют осуществить этап 2, поскольку (ввиду свойства I) не может случиться, чтобы требовал поворота только один средний кубик.

Этап 3: угловые кубики — на место

Комбинация из двенадцати поворотов

$$K_3=(ABA^{-1}B^{-1})^3$$

осуществляет одновременно перестановки кубиков 1, 2 и кубиков 3, 4 (рис. 5), сохраняет все достижения этапов 1, 2 и не изменяет местоположения угловых кубиков, отличных от 1, 2, 3, 4 (проверьте!)

Комбинация из двадцати четырех поворотов

$$K_4=(ACA^{-1}C^{-1})^3(B^{-1}A^{-1}BA)^3$$

осуществляет перестановку кубиков 1, 2, 3 (рис. 6) по схеме $1\to2\to3\to1$, сохраняет все достижения этапов 1, 2 и не изменяет местоположения угловых кубиков, отличных от 1, 2, 3.

Поясним, как, пользуясь комбинациями K_3 и K_4, осуществлять этап 3.

Допустим, что после завершения этапа 2 часть угловых кубиков не стоит на своих местах. Ввиду свойства II таких кубиков будет не менее, чем три. Выберем один из них и отметим его номером 1. Кубик, занимающий то место, куда должен встать кубик 1, отметим номером 2.

Если кубик 2 сам должен перейти на место кубика 1, то номером 3 отметим любой, отличный от первых двух и стоящий не на своем месте угловой кубик, а номером 4 — кубик, стоящий там, куда должен перейти кубик 3. Затем, с помощью вспомогательных поворотов (запоминая их) поставим кубики 1, 2 и 3, 4 в положение пар 1, 2, и 3, 4, изображенных на рисунке 5. С помощью комбинации K_3 осуществим перестановку $1\rightleftarrows2$, $3\rightleftarrows4$, после чего в обратной очередности и обратных направлениях повторим вспомогательные повороты. В итоге, кроме ранее стоявших на своих местах угловых кубиков, заведомо попадут на свои места кубики 1, 2, 3.

Если же кубик 2 не должен был перейти на место кубика 1, то отметим номером 3 кубик, стоящий там, куда должен перейти кубик 2. Если кубик 3 не должен перейти на место кубика 1, то отметим номером 4 кубик, который стоит там, куда должен перейти кубик 3. После этого, как и выше, то есть с помощью вспомогательных поворотов и комбинации K_3, осуществляем перестановку $1\rightleftarrows2$, $3\rightleftarrows4$, которая ставит на свои места кубики 1 и 3.

Остается случай, когда требуется перестановка кубиков $1\to2\to3\to1$. В этом случае, с помощью вспомогательных поворотов (запоминая их) ставим кубики 1, 2, 3 в каком-то порядке на места 1, 2, 3 (рис. 6). Одна из двух комбинаций K_4, K_4^{-1}, которые осуществляют перестановки мест $1\to2\to3\to1$, $1\to3\to2\to1$, будет осуществлять перестановку кубиков $1\to2\to3\to1$ (находящихся сейчас на местах 1, 2, 3). Выполним именно эту комбинацию. После этого в обратной очередности и обратных направлениях повторим вспомогательные повороты. В итоге кубики 1, 2, 3 станут на место.

Повторяя указанный процесс, мы выполним этап 3 — поставим на свои места все угловые кубики.

Этап 4: повернем угловые кубики

Нам потребуются следующие две комбинации:

$$K_5=[(A^{-1}CAC^{-1})(C^{-1}BCB^{-1})(B^{-1}ABA^{-1})]^2,$$
$$K_5^{-1}=[(AB^{-1}A^{-1}B)(BC^{-1}B^{-1}B)(BA^{-1}B^{-1}A)]^2.$$

Комбинация K_5 поворачивает одновременно каждый из кубиков 1, 2, 3 (рис. 7) вокруг оси, идущей от его центра к центру куба, на 120° по часовой стрелке. Комбинация K_5^{-1} поворачивает те же кубики против часовой стрелки. Местоположение и поворот любого из остальных кубиков при этом не меняются.

Знание комбинаций K_5 и K_5^{-1} позволяет совместно повернуть в желаемом направлении (но в одну и ту же сторону) любые три угловых кубика. Достаточно собрать их с помощью вспомогательных поворотов в одну грань, совместно повернуть с помощью комбинации K_5 или K_5^{-1} (в зависимости от нужного направления поворота), а затем вернуть на своим места поворотами, обратными вспомогательным.

Поясним теперь, как, пользуясь комбинациями K_5 и K_5^{-1}, осуществить этап 4.

Если после завершения этапа 3 имеются неправильно повернутые угловые кубики, то, ввиду свойства III, таких кубиков не менее двух.

Допустим, что их больше двух. Возьмем любые три из них. Хотя бы два из этих трех кубиков требуют поворота в одну и ту же сторону. Повернув в эту сторону все три кубика, мы уменьшим число неверно повернутых кубиков. Так мы придем к положению, когда неверно повернутых кубиков либо нет, либо ровно два.

Если неверно повернутых кубиков только два, они не могут оба требовать поворота в одну и ту же сторону. Иначе мы бы совместно повернули их и еще один кубик — появилось бы положение с одним неверно повернутым кубиком, что невозможно в силу III.

Итак, два неверно повернутых кубика требуют поворота в разные стороны. Повернем в нужную сторону один их этих кубиков и два кубика, ранее стоявших правильно. А затем — в другую сторону — эти два новых кубика и второй из ранее повернутых неправильно. В результате все кубики займут правильное положение!

Приложение*)

Обозначим через S_0 *правильное состояние* куба. Занумеруем числами $i=1, 2, ..., 8$ его вершины (угловые кубики) и числами $j=1, 2, ..., 12$ его ребра (средние кубики). На ребрах выберем (и запомним) любую ориентацию (и нарисуем соответствующие стрелки на средних кубиках) так, чтобы параллельные ребра были сонаправлены.

Предположим, что в некотором *законном состоянии***) S куба j-й средний кубик попал на ребро j'; сравним ориентацию ребра j' (которую мы запомнили) со стрелкой, нарисованной на j-м кубике. Обозначим через $n_j(S)$ величину, равную 0, если указанные ориентации совпадают, и равную 1 в противном случае. Если сумма

$$n_1(S)+n_2(S)+...+n_{12}(S)$$

четна, мы полагаем $n(S)=0$, иначе $n(S)=1$; можно сказать, что $n(S)$ — это «четность суммарного поворота средних кубиков». Докажите, что

1. *Величина n является инвариантом, то есть одинакова при всех законных состояниях куба:* $n(S)=n(S_0)=0$. (Указание. Достаточно показать, что $n(S)$ не меняется при любом повороте одной плитки).

2. *В законном состоянии куба не может быть повернут ровно один средний кубик* (свойство I, с. 19). (Указание. В таком состоянии $n(S)=1$).

Вспомним, что положение центральных клеток куба в пространстве не меняется при поворотах; для определенности предположим, что нижний центральный кубик — зеленый, верхний — синий; эти два цвета будем считать *выделенными*. Возьмем i-й угловой кубик нашего куба, находящегося в состоянии S. Ровно одна клетка углового кубика выделена (почему?). Если эта клетка горизонтальна, положим (по определению) $N_i(S)=0$; если эта клетка становится горизонтальной при повороте кубика на 120° (по часовой стрелке) вокруг диагонали большого куба, положим $N_i(S)=1$; если же горизонтальность получается поворотом на 240°, то $N_i(S)=-1$. Если сумма

$$N_1(S)+N_2(S)+...+N_8(S)$$

при делении на 3 дает в остатке 0, 1, 2, мы полагаем величину $N(S)$ равной 0, 1, —1 соответственно. Можно сказать, что величина N — это «направление суммарного поворота угловых кубиков». Докажите, что

3. *Величина N является инвариантом, то есть одинакова при всех законных состояниях куба:* $N(S)=N(S_0)=0$.

4. *В законном состоянии у куба не может быть повернут неправильно ровно один угловой кубик* (свойство III, с. 19).

Предположим теперь, что в состоянии S средние кубики с номерами 1, 2, ..., 12 занимают места с номерами $j_1, j_2, ..., j_{12}$ соответственно, а угловые кубики 1, 2, ..., 8 — места $i_1, i_2, ..., i_8$. Наборы $I(S)=(i_1, i_2, ..., i_8)$ и $J(S)=(j_1, j_2, ..., j_{12})$ — это просто номера кубиков, записанные в другом порядке; математики такие наборы называют *перестановками*. Перестановку называют *четной*, если в ней имеется четное число *беспорядков*, то есть четное число пар цифр, стоящих не в порядке возрастания, и *нечетной* в противном случае. Например, перестановка (12453687) нечетна, так как она содержит 3 беспорядка: (4, 3), (5, 3), (8, 7). Обозначим через $\varepsilon(S)$ число, равное 0, если $I(S)$ и $J(S)$ имеют одинаковую четность, и равное 1 в противном случае. Можно сказать, что ε — это «четность расстановки всех кубиков». Докажите, что

5. *Величина ε является инвариантом, притом $\varepsilon(S)=\varepsilon(S_0)=0$ для любого законного состояния S.* (Указание. Покажите, что при любом повороте плитки меняется четность I и четность J).

6. *Ровно два угловых кубика не могут поменяться местами* (свойство II, с. 19).

7*. *Состояние S куба законно тогда и только тогда, когда*

$$n(S)=N(S)=\varepsilon(S)=0.$$

8*. *Все состояния (в том числе полученные разборкой и сборкой куба разбиваются на 12 классов; при этом два состояния S, S' переводятся друг в друга поворотами плит тогда и только тогда, когда $n(S)=n(S')$, $N(S)=N(S')$, $\varepsilon(S)=\varepsilon(S')$.*

---

*) Автор Приложения — В. Дубровский.

**) То есть в состоянии, полученном из правильного поворотами плиток (без перекрашивания клеток или разборки кубика).