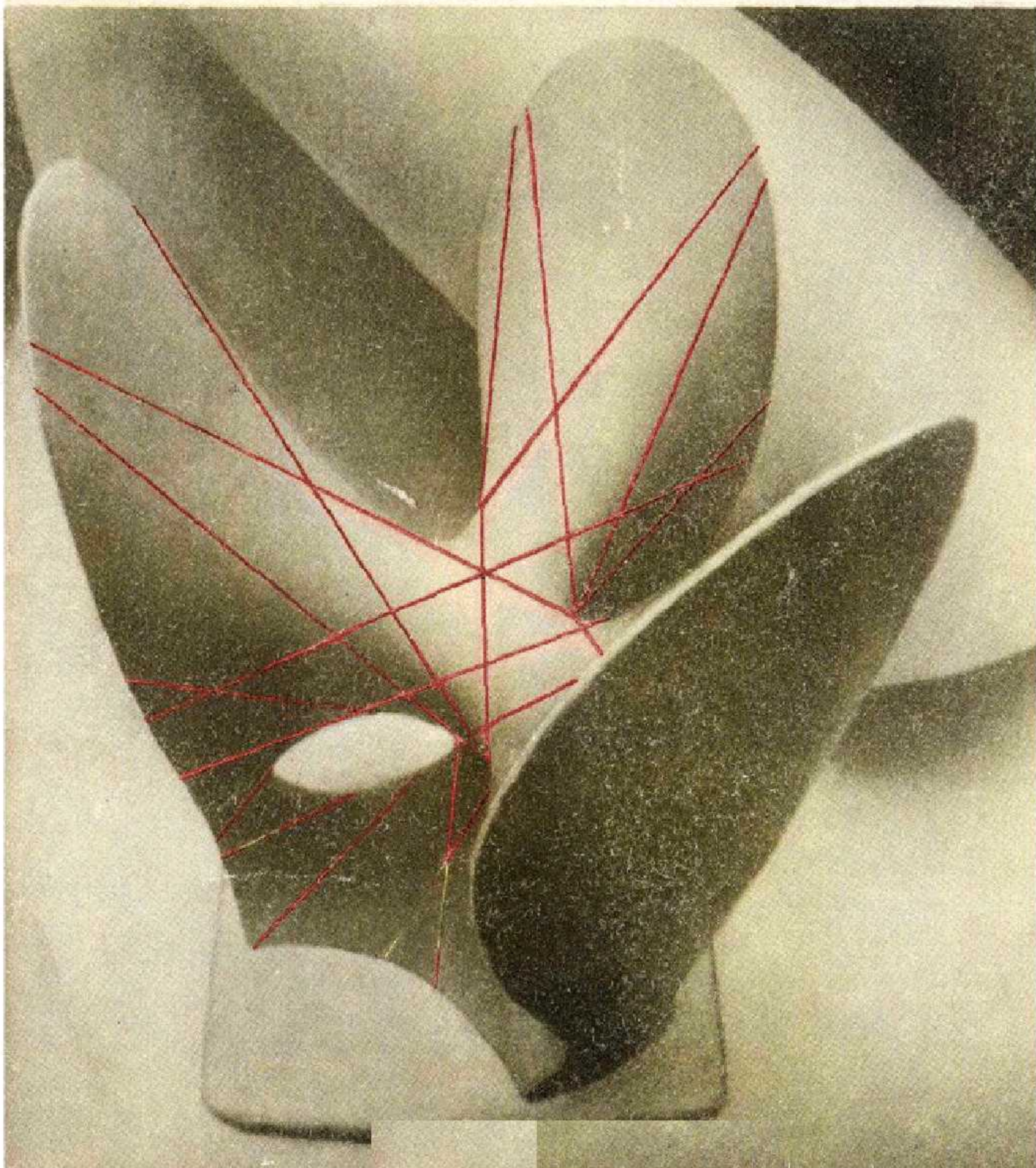


# Квант

9  
1983

*Научно-популярный физико-математический журнал  
Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР*





# Кубик в картинках

Кандидат физико-математических наук  
В. Н. ДУБРОВСКИЙ

Наверное, кубик Рубика уже не нуждается в представлении — только «Квант» посвятил ему четыре большие статьи\*), и даже по телевидению его показывали! А самое главное — наконец, он стал появляться в продаже. Теперь повсюду можно встретить людей (обычно весьма юных), пытающихся собрать кубик — упорно, но не всегда успешно. Вот мы и решили еще раз рассказать, а точнее — показать на картинках, как это делается.

Повороты граней мы будем изображать с помощью стрелок в квадрате

\*) В. Залгаалер, С. Залгаалер «Венгерский шарнирный кубик» (1980, № 12), М. Евграфов «Механика волшебного кубика» (1982, № 3), В. Дубровский «Алгоритм волшебного кубика» (1982, № 7) и «Математика волшебного кубика» (1982, № 8). См. также заметку «Игра, задача или спорт?» (1982, № 7, с. 25) и статью Ю. Демкова «Поворачиваем кубики» (1981, № 12).

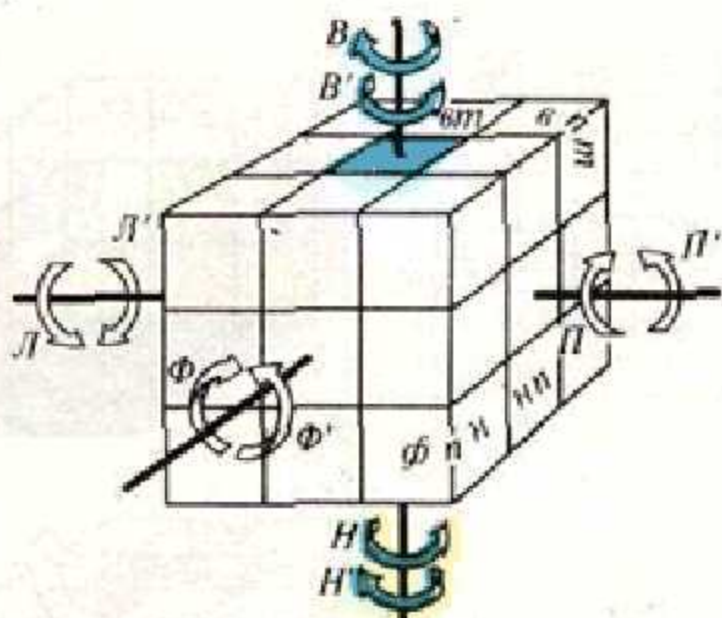


Рис. 0. «Стрелочные» и «буквенные» обозначения поворотов пяти граней (задняя грань нам не понадобится). Например, буква Ф обозначает поворот передней (Фасад) грани на  $90^\circ$  по часовой стрелке,  $\Phi'$  — ее поворот на  $90^\circ$  против часовой стрелки,  $\Phi^2$  — ее поворот на  $180^\circ$ . На этом и следующих рисунках незакрашенные грани кубиков — это грани, цвет которых на данном рисунке мы не желаем фиксировать.

$3 \times 3$ , изображающем переднюю грань кубика (рис. 0).

Каждый этап сборки задается рисунками, на которых показаны исходное положение кубиков, которые переставляются на этом этапе, последовательность поворотов этого этапа и вид кубика после его завершения.

Договоримся, что при сборке грань с синим центральным квадратом всегда будет у нас верхней. Центральный квадрат противоположной грани в разных экземплярах кубика бывает разным; для определенности будем считать его зеленым. Итак, в результате сборки верхняя грань кубика должна стать у нас синей, нижняя — зеленой. Передней гранью по ходу сборки может служить любая из четырех остальных (боковых) граней.

Если вы хоть немного крутили кубик, вы поняли, что центральные кубики всех граней сразу можно считать стоящими на своем месте (поскольку их взаимное расположение жестко установлено конструкцией кубика), а для каждого из остальных кубиков имеется вполне определенное окончательное положение: каждая грань кубика должна примыкать (по стороне или вершине) к центральному квадрату того же цвета.

Кубик мы будем собирать послойно — сначала нижний слой (первые два шага), потом средний (третий шаг) и, наконец, верхний (последние четыре шага).

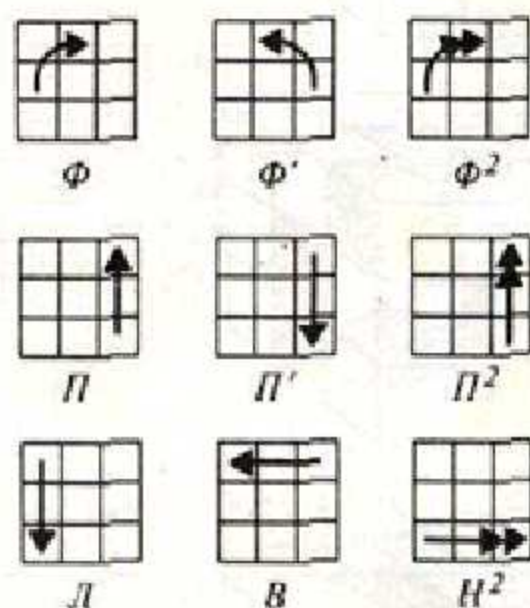
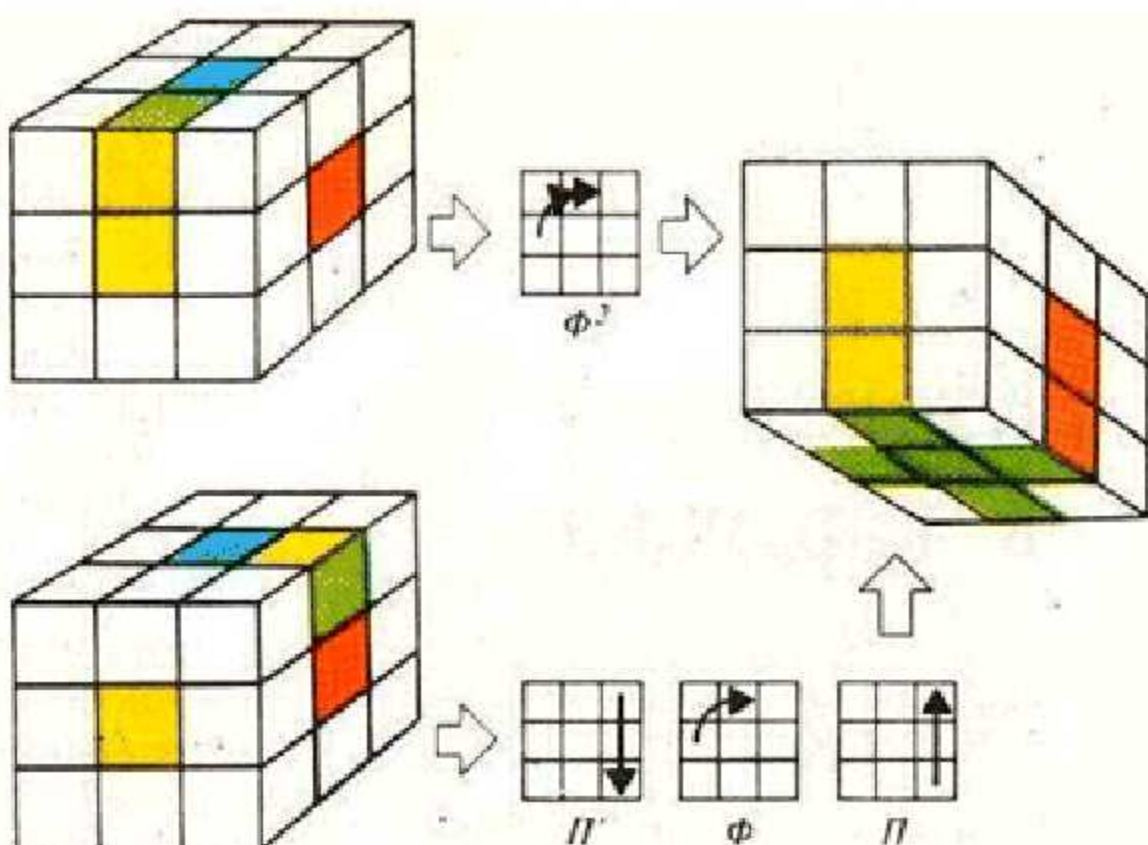




Рис. 1. Первый шаг: установка нижнего реберного кубичка.



Итак, начинаем!

Первый шаг. **Нижний крест:** устанавливаем нижние реберные кубички (рис. 1). Выберите какой-нибудь реберный кубичек с зеленой гранью, не стоящий в окончательном положении, и поворотом боковой грани, в которой он находится, переведите его в верхнюю грань. Пусть вторая грань выбранного кубичка — желтая; поворотом кубика сделайте грань с желтым центральным квад-

ратом передней и поворотом верхней грани приведите кубик в какое-то из двух исходных положений рисунка 1. Действуйте согласно рисунку — выбранный кубичек окажется в нужном положении. Устанавливая каждый следующий реберный кубик, нельзя портить уже достигнутое (подумайте, как это сделать!).

В дальнейшем на всех рисунках мы тоже будем переднюю грань изображать желтой (то есть с жел-

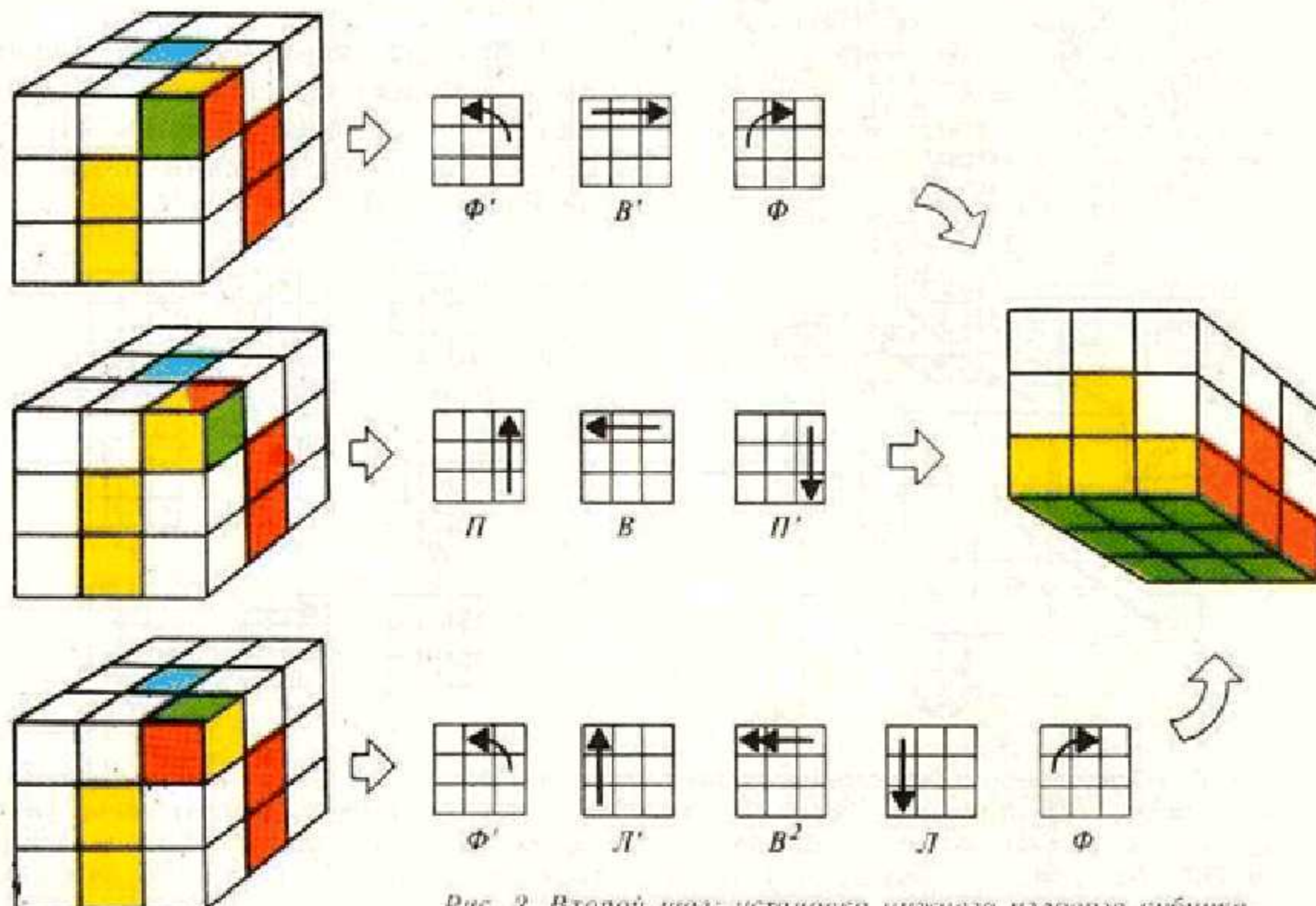


Рис. 2. Второй шаг: установка нижнего углового кубичка.



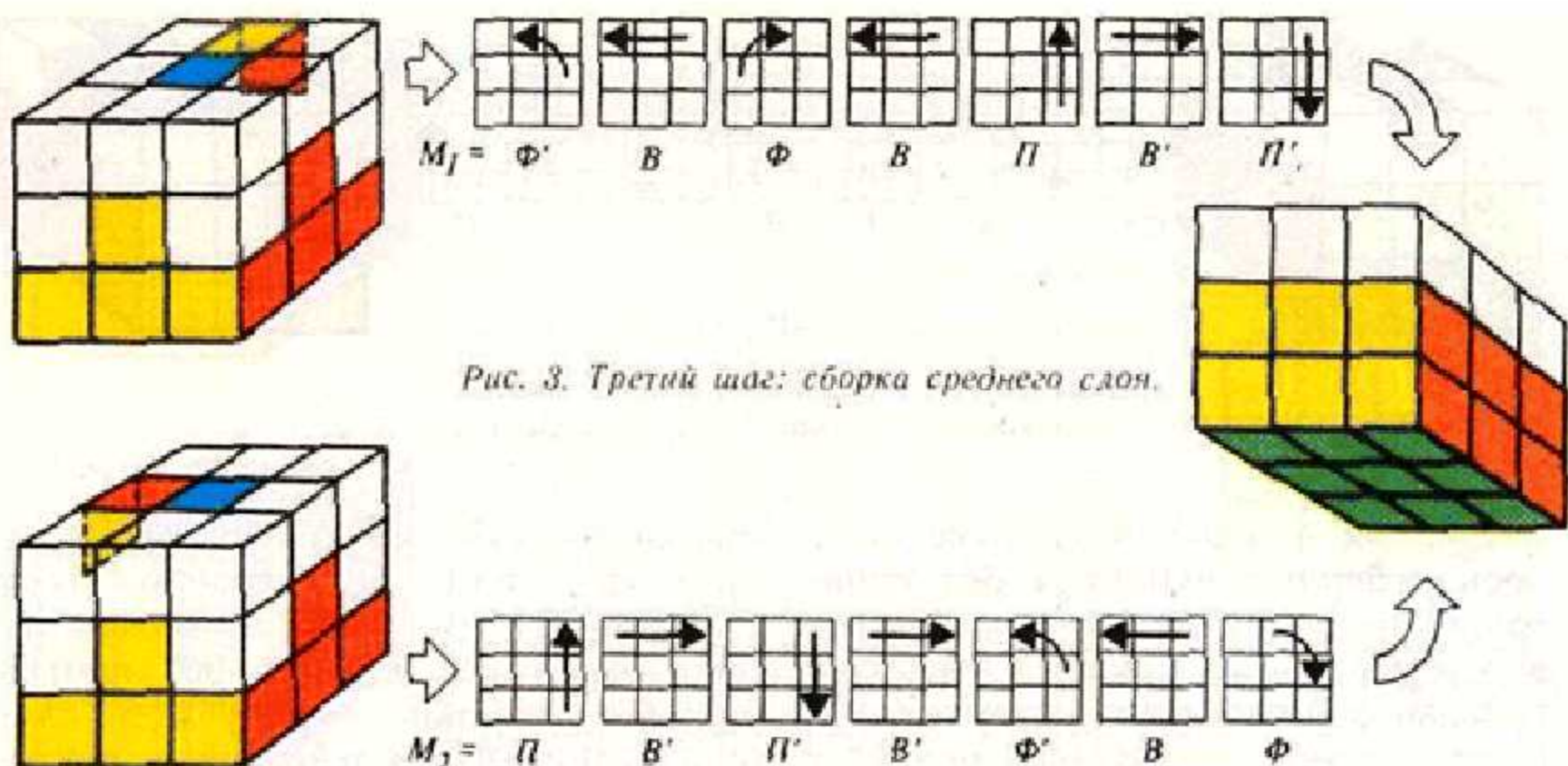


Рис. 3. Третий шаг: сборка среднего слоя.

тым центральным квадратом), правую — оранжевой. Но, разумеется, на каждом шаге, приводя кубик к исходному положению соответствующего рисунка, вам самим придется соображать, какую грань принять за переднюю.

**Второй шаг. Нижние углы:** устанавливаем нижние угловые кубички (рис. 2). Выберите какой-нибудь угловой кубичек с зеленой гранью, находящийся в верхнем слое, и поворотом верхней грани поставьте его точно над его местом в нижнем слое. При этом выбранный кубичек займет какое-то из трех исходных положений рисунка 2. Действуйте согласно рисунку — выбранный кубичек окажется в нужном положе-

нии. Если в верхнем слое не осталось угловых кубичков с зеленой гранью, но в нижнем слое какой-то угловой кубичек не стоит в окончательном положении, поверните кубик так, чтобы этот кубичек оказался «передним-правым-нижним», и сделайте любую из операций рисунка 2 — он окажется в верхнем слое.

**Третий шаг. Средний слой:** устанавливаем средние реберные кубички (рис. 3). Выберите какой-нибудь реберный кубичек без синих граней, находящийся в верхнем слое. Поворотом верхней грани приведите кубик в какое-то из двух исходных положений рисунка 3. Действуйте согласно рисунку — выбранный кубичек окажется в нужном положе-



Рис. 4. Четвертый шаг: ориентирование двух верхних реберных кубичков. (Красные стрелки показывают, как они при этом переставляются, что на этом шаге для нас не важно.)



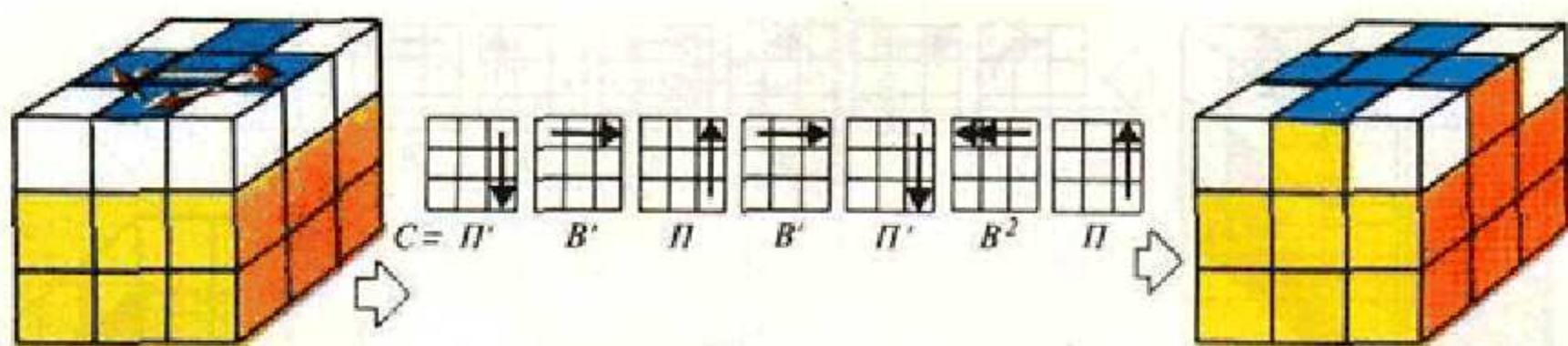


Рис. 5. Пятый шаг: перестановка трех верхних реберных кубичков.

нии. Если в верхнем слое не осталось реберных кубичков без синих граней, но какой-то из средних реберных кубичков не находится в окончательном положении, поверните кубик так, чтобы этот кубичек оказался «передним-правым», и сделайте любую из операций рисунка 3 — он окажется в верхнем слое.

**Четвертый шаг. Ориентирование верхних реберных кубичков: устанавливаем верхние реберные кубички синими гранями вверх** (рис. 4). Неправильно повернутыми могут быть только два или четыре кубичка — поэтому достаточно уметь перевернуть пару соседних или пару противоположных кубичков, выполните одну из двух операций рисунка 4\*) — выбранные кубички перевернутся. (При этом они еще и переставятся.)

**Пятый шаг. Перестановка верхних реберных кубичков: расставляем верхние реберные кубички по своим местам, не переворачивая их** (рис. 5). Если один из них уже стоит правильно, а три других надо переставить по направлению часовой стрелки (случай А), поместите кубик в исходное положение рисунка 5 и действуйте согласно рисунку — кубички расставятся по своим местам. В противном случае поверните верхнюю грань так, чтобы какие-то два ее реберных кубичка встали правильно. (Это всегда возможно. Почему?) Если два других правильно не встанут, то дальше действуем в зависимости от того, являются ли «пра-

вильные» кубички соседними (случай Б) или противоположными (случай В). В случае Б поверните верхнюю грань еще на  $90^\circ$  против часовой стрелки — получится случай А. В случае В действуйте согласно рисунку 5, приняв за переднюю любую боковую грань кубика; после этого, повернув верхнюю грань на  $90^\circ$  в нужном направлении, опять придем к А. (Между прочим, случай В встречается в 5 раз реже случая Б — докажите!)

Остается уже немного.

**Шестой шаг. Ориентирование верхних угловых кубичков: устанавливаем верхние угловые кубички синими гранями вверх** (рис. 6). После пятого шага неправильно повернутыми могут быть два, три или все четыре кубичка\*). В случае трех «неправильных» кубичков поместите кубик в одно из двух исходных положений рисунка 6 и действуйте согласно рисунку — кубички повернутся. (При этом они еще и переставятся.) Если надо перевернуть два или четыре кубичка, расположите кубик так, чтобы левый верхний угол передней грани был синим и выполните операцию  $T'$  для случая двух кубичков или  $T$  для четырех. После этого выполните операцию  $T$ , приняв за переднюю соответствующую боковую грань кубика.

И, наконец:

**Седьмой шаг. Перестановка верхних угловых кубичков: расставляем верхние угловые кубички по своим местам, не переворачивая их**

\*) Присмотревшись к буквенной записи операций  $F$  и  $F'$ , легко увидеть, что они являются взаимно обратными:  $F' = F^{-1}$ , кроме того,  $F'$  можно заменить на  $F^2$ . Аналогичные утверждения верны для операций  $T, T'$  (шестой шаг) и для операций  $Z, Z'$  (седьмой шаг).

\*) Причем, например, в случае трех неправильно повернутых кубичков их синие грани должны обязательно выходить на разные боковые грани кубика. Аналогичные утверждения выполняются и для двух или четырех кубичков. Об этом подробно рассказано в статье «Математика волшебного кубика».





(рис. 7). После шестого шага либо все верхние угловые кубички встанут правильно, либо один из них встанет правильно, а три других надо циклически переставить, либо все они будут стоять неправильно. В первом случае все в порядке — кубик собран. Во втором случае, в зависимости от того, надо ли переставить «неправильные» кубички против часовой стрелки или по часовой стрелке, выполните одну из двух операций рисунка 7 — кубички расставятся по своим местам. В третьем случае выполните любую из операций рисунка 7, приняв за переднюю любую боковую грань кубика, — один угловой кубичек встанет пра-

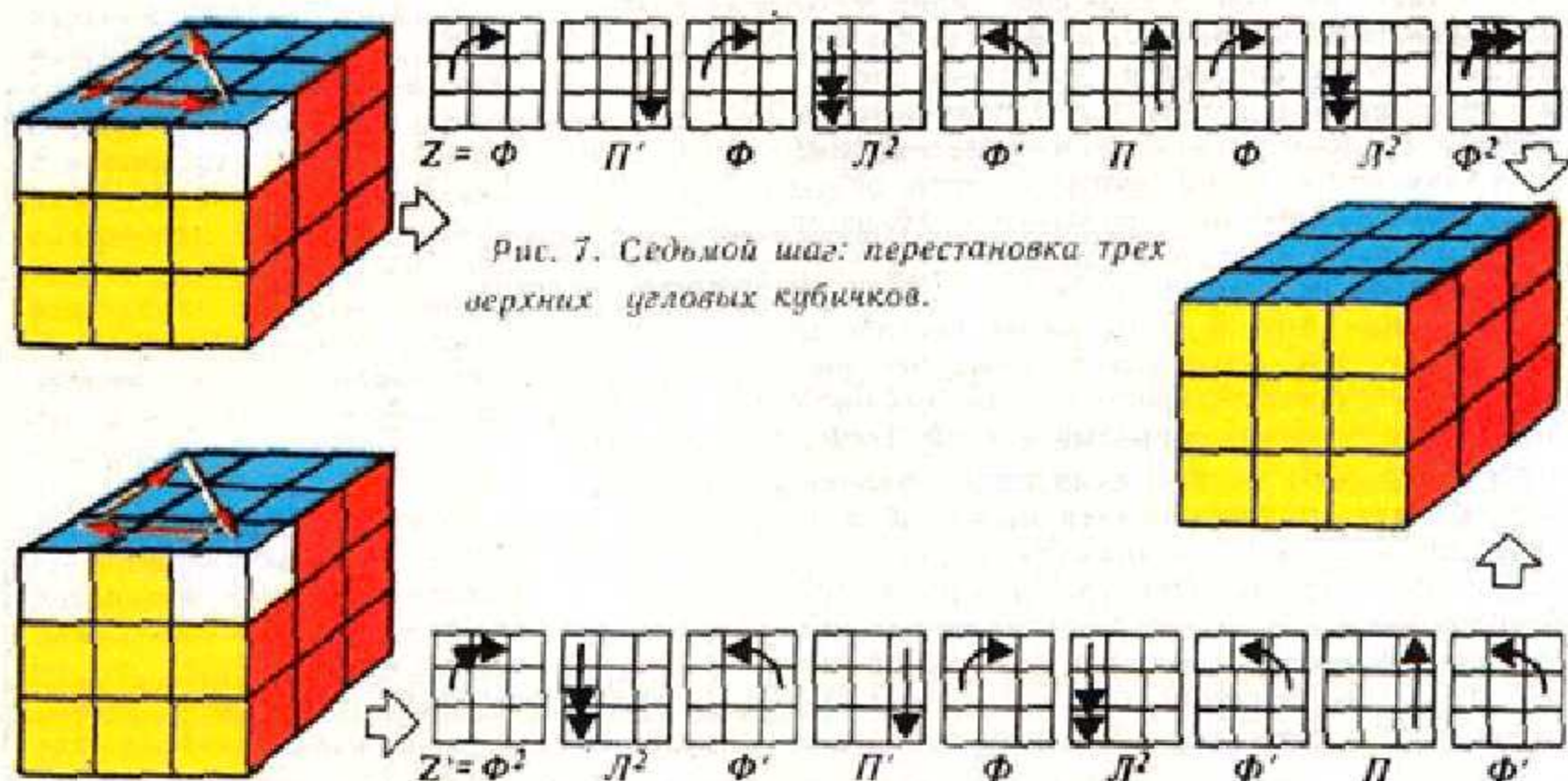
вильно, и мы получим предыдущий случай\*).

Все. Можно вздохнуть с облегчением — кубик собран!

\* \* \*

Читатель нашего журнала вряд ли удовлетворится тем, что научится собирать кубик по шпаргалке. Как же без нее обойтись? Конечно, все нужные операции можно просто запомнить. И подобраны они так, чтобы это было не слишком трудно.

\*1 Попробуйте доказать, что в любом случае можно обойтись не более чем двукратным применением операции Z.





Операции первых двух шагов совсем короткие. Советуем вам проделать их медленно, поворот за поворотом, и проследить за передвижениями тех кубичков, которые устанавливаются в правильное положение с их помощью, — вы поймете, как эти операции «работают», и научитесь выполнять их не задумываясь. Для каждого из следующих шагов можно запомнить только одну операцию; вторую (там, где она есть) всегда можно заменить на дважды проделанную первую. Отметим еще, что 5 последних ходов операции  $M_1$  (3-й шаг) совпадают с 5-ю первыми ходами  $F$  (4-й шаг) и что операция  $Z$  (7-й шаг) получается из  $T$  (6-й шаг) заменой первого хода  $P^2 = P'P'$  на  $\Phi P'$  и двух последних —  $\Phi^2 P$  — на  $\Phi' \Phi' = \Phi^2$ . Так что по сути дела надо выучить только три основные операции  $M_1$ ,  $C$ ,  $T$  и некоторые их варианты.

Однако гораздо интереснее и полезнее проникнуть в «принцип действия» этих операций.

Рассмотрим для начала операцию  $M_1 = \Phi' V \Phi \cdot V \cdot P V' P'$ . Первые три ее поворота  $\Phi' V \Phi$  аналогичны трехходовкам 2-го шага и переводят кубичек  $\phi_{лн}$  (способ обозначения кубичков см. на рис. 0) из нижнего слоя в верхний, причем так, что он правильным образом приставляется к соответствующему реберному кубичку (проверьте!); похожи на них и последние три поворота  $P V' P'$ , возвращающие кубичек  $\phi_{лн}$  (вместе с приставленным к нему реберным) на место; промежуточный поворот  $V$  готовит исходную позицию для последних трех поворотов. Проанализируйте самостоятельно операцию  $M_2$  и операцию  $M_3 = \Phi' V \Phi V^2 P V^2 P'$ , которую можно применять вместо  $M_1$ . После этого попробуйте на той же основе придумать операции, аналогичные  $M_1$  и  $M_2$ , для случая, когда кубичек  $\phi_{лн}$  стоит на своем месте, но ориентирован неправильно. Можно пойти дальше и разработать операции, позволяющие объединить 2-й и 3-й шаги, то есть одновременно с каждым нижним угловым кубичком устанавливать и примыкающий к нему реберный кубичек среднего слоя.

Операции 4-го и 5-го шагов построены на основе так называемых коммутаторов, то есть последовательностей вида  $x y x^{-1} y^{-1}$  ( $x^{-1}$  — это поворот, обратный к  $x$ :  $\Phi^{-1} = \Phi'$ ,  $(\Phi')^{-1} = \Phi$ ,  $(\Phi^2)^{-1} = \Phi^2$ ). Если  $x$  и  $y$  — это повороты двух смежных граней кубика  $X$  и  $Y$  (на  $\pm 90^\circ$  или  $180^\circ$ ), то коммутатор  $x y x^{-1} y^{-1}$  циклически переставляет три реберных кубичка: один — из грани  $X$ , другой — из  $Y$ , третий — на общем ребре  $X$  и  $Y$  (проверьте!); при этом переставляются и некоторые угловые кубички, но здесь это нас почти не инте-

ресует\*). Например, коммутатор  $V P V' P'$  осуществляет перестановку  $\phi_{лн} \rightarrow \phi_{тл} \rightarrow \phi_{вл} \rightarrow \phi_{лн}$ . Если же перед ним выполнить поворот  $\Phi$ , а после него  $\Phi'$ , то есть операцию  $F = \Phi \cdot V P V' P' \cdot \Phi'$ , то в этой перестановке вместо кубичка  $\phi_{лн}$  будет участвовать  $\phi_{вн}$  (он занимает место  $\phi_{лн}$  при повороте  $\Phi$ ). В результате переставляются три реберных кубичка одной грани — верхней:  $\phi_{вн} \rightarrow \phi_{тл} \rightarrow \phi_{вл} \rightarrow \phi_{вн}$ , причем два из них,  $\phi_{вн}$  и  $\phi_{вл}$ , переворачиваются (это нам и нужно на 4-ом шаге); существенно также и то, что нижние угловые кубички остаются на своих местах. Аналогично устроены операции  $F' = \Phi \cdot P V P' V' \cdot \Phi'$  и  $C = P' V' \cdot P V' P' V \cdot V P$ . Придумайте сами другие аналогичные операции; попробуйте научиться сразу составлять верхний крест (шаги 4-й и 5-й), используя не более двух операций такого типа.

Описанный прием преобразования операций (в данном случае — коммутаторов) называется сопряжением; в общем виде:  $g = a \cdot f \cdot a^{-1}$  — операция, сопряженная с  $f$ . Этот же прием использован для образования операций двух последних шагов  $T$  и  $Z$ ; обе они сопряжены с  $Y = P' \Phi P^2 \Phi' P \Phi P^2 \Phi'$ ;  $T = P' Y P$ , а  $Z = \Phi' Y \Phi$ . Операция  $Y$  переставляет три угловых кубичка ( $\phi_{лв} \rightarrow \phi_{вл} \rightarrow \phi_{лт} \rightarrow \phi_{лв}$ ), оставляя все остальные кубички на местах.

Рекомендуем читателю самостоятельно составить и проделать другие операции по общей схеме  $A \cdot B C B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot B C^{-1} B^{-1}$ , где  $A$  и  $C$  — повороты двух противоположных граней (на любые из углов  $\pm 90^\circ$ ,  $180^\circ$ ), а  $B$  — поворот перпендикулярной им грани (на  $\pm 90^\circ$ ). Можете ли вы объяснить, почему все они циклически переставляют какие-то три угловых кубичка? (Заметьте, что при операции  $B C B^{-1}$  в грани  $A$  заменяется ровно один кубичек (угловой) — на кубичек из грани  $C$ ; ср. операции 2-го шага.) Для того чтобы сразу выполнить оба последних шага сборки кубика, всегда достаточно трех и почти всегда — двух операций такого вида (или сопряженных с ними).

Мы раскрыли все секреты описанного метода сборки кубика Рубика и объяснили, как его можно сократить. Остальное — дело рук самих читателей.

\* Алгоритм сборки кубика, целиком основанный на коммутаторах, был опубликован в статье «Венгерский шарнирный кубик».