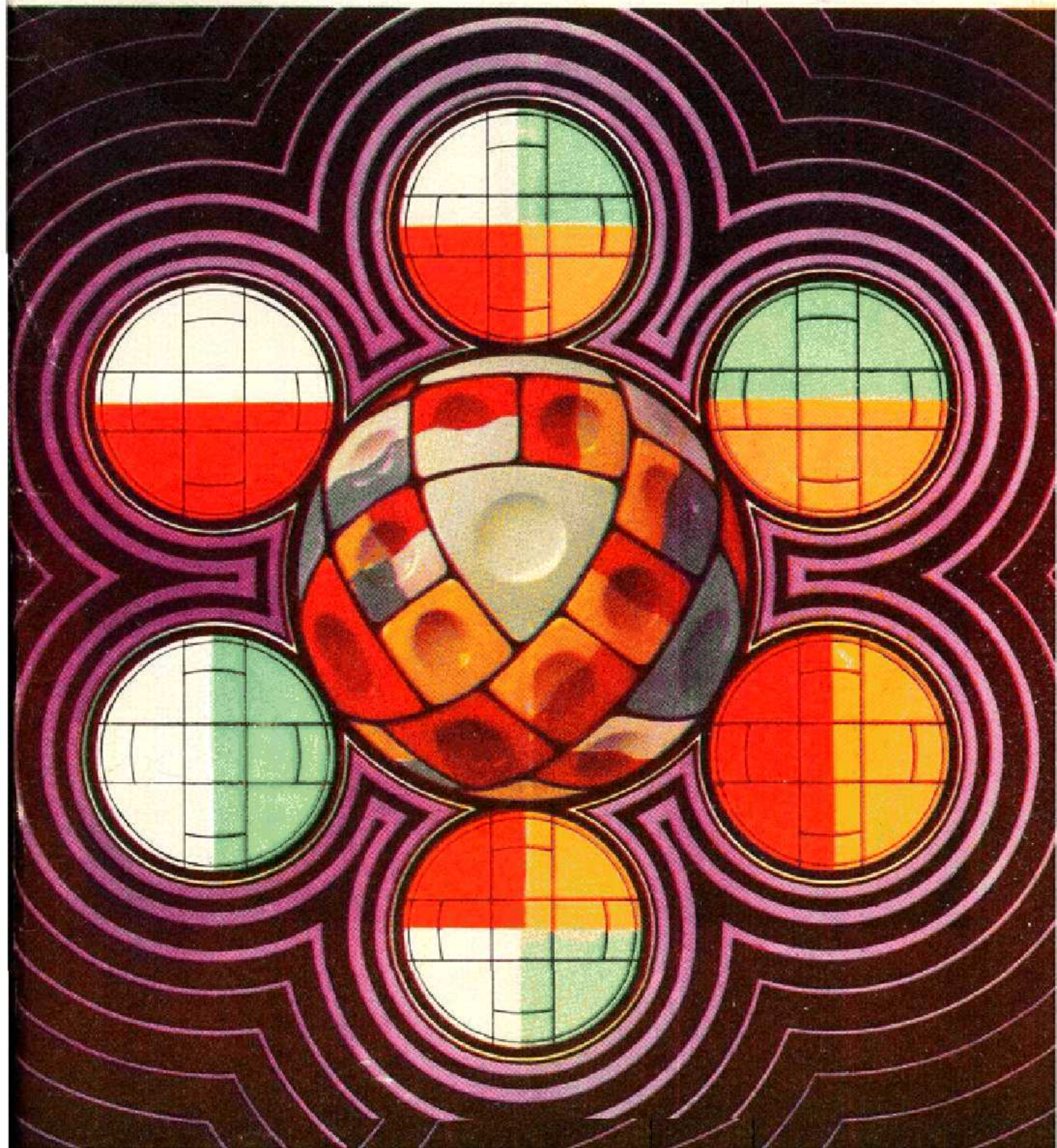


Квант

7
1982

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР



В. Дубровский

Алгоритм волшебного кубика

Непросто справиться с «венгерским волшебным кубиком» — самой популярной головоломкой XX века. Поэтому нетерпеливые люди, потеряв надежду на успех, зачастую прекращают свое знакомство с ним разламывая его на кусочки. Говорят, что после появления «кубика» в Японии даже понизилась производительность труда, а в США эту игрушку сейчас продают в комплекте с пластмассовым топориком: не сумел решить — ломай!

«Квант» относится к кубику Рубика более спокойно и серьезно, о чем свидетельствует публикуемая ниже статья.

В этой статье мы рассказываем, как решить волшебный кубик — знаменитую головоломку Э. Рубика*). Строго говоря, алгоритма решения (то есть набора точных правил для приведения раскраски всех граней из произвольной к одноцветной) мы здесь не приводим — такой алгоритм уже был опубликован в «Кванте» (1980, № 12, с. 17). Вместо этого мы даем большой список полезных комбинаций, указывая для каждой способ выполнения (последовательность поворотов) и результат (какие маленькие кубики переставляются и как). Из различных комбинаций, приводящих к одному и тому же результату, мы старались выбрать самую короткую. В конце статьи мы показываем, что волшебный кубик можно привести в начальное состояние (с одноцветными гранями) за 79 поворотов или меньше.

*) Если у вас нет экземпляра кубика, вы можете его сконструировать, пользуясь указаниями статьи М. Евграфова в «Кванте» 1982, № 3.

Обозначение операций

Обозначим каждую грань волшебного кубика: Φ (фасад), T (тыл), B (верх), H (низ), P (правая), L (левая) (см. рис.). Поворот грани X на $n \cdot 90^\circ$ по часовой стрелке будем обозначать через X^n , например повороты правой грани на 90° , 180° , 270° записываются, как P , P^2 , $P^{-1}=P^3$. Таким образом каждой операции (цепочке поворотов граней) отвечает «слово» из букв Φ, T, B, H, P, L со степенями*), читаемое и выполняемое слева направо.

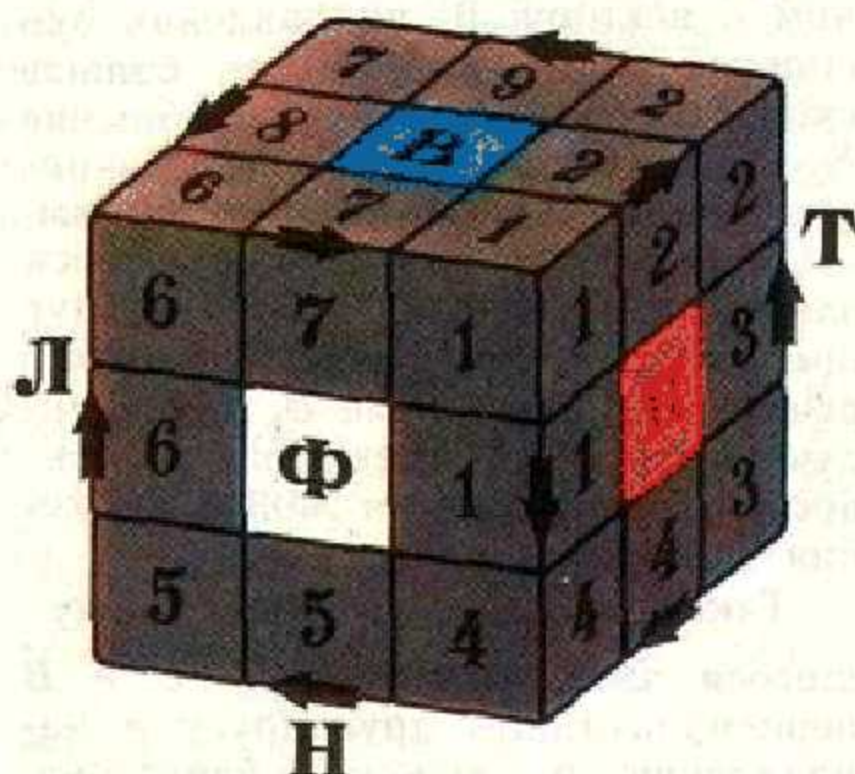
Обозначение результата операции

Мы будем записывать в единой формуле как передвижение маленьких кубиков, так и изменение их ориентации в пространстве.

Для записи передвижений маленьких кубиков перенумеруем угловые кубики и соответствующие вершины числами от 1 до 8, средние (и соответствующие ребра) — числами от 1 до 12 (см. рисунок; записи всех рассматриваемых в статье операций относятся к нумерации, показанной на этом рисунке).

Допустим, что в результате операции F первый угловой кубик перешел на место i_1 -го, i_1 -й — на место i_2 -го и т. д. Каждый раз в этой цепочке будет появляться новый номер и неизбежно наступит момент, когда

*) Забавный способ запоминания таких «слов» приводится в статье «Венгерский кубик» в журнале «Наука и жизнь», № 3 за 1981 г. (с. 131).



кубик с номером i_{n_1} вернется на место первого (почему?). Кубики $1, i_1, \dots, i_{n_1}$ образуют в операции F цикл, обозначаемый $(1i_1 \dots i_{n_1})$. Если еще не все угловые кубики вошли в этот цикл ($n_1 < 7$), то берем любой из оставшихся (пусть его номер i_{n_1+1}) и повторяем тот же процесс — возникнет второй цикл $(i_{n_1+1} \dots i_{n_2})$. В конце концов запись угловых кубиков окажется разложенной на независимые (то есть не имеющие общих элементов) циклы: $(1i_1 \dots i_{n_1}) \cdot (i_{n_1+1} \dots i_{n_2}) \dots$

Аналогично обстоит дело со средними кубиками. Соответствующие циклы мы будем записывать в квадратных скобках; так, запись $[2\ 7\ 6]$ означает, что второй средний кубик перешел в седьмой, седьмой — в шестой, шестой — во второй.

Пусть в результате некоторой операции i -й средний кубик занял место j -го. Он может расположиться на этом месте двумя способами. Если направление стрелки, привязанной к его ребру (см. рис. 1), окажется противоположным направлению стрелки j -го кубика, то в соответствующем цикле после номера i поставим знак минус. Отсутствие знака означает, что направления стрелок совпали. Так, запись $[2^{-}7^{+}6^{-}]$ (или $[2^{-}7\ 6^{-}]$, «плюсики» мы обычно опускаем для средних кубиков) означает, что второй средний кубик перешел в седьмой с противоположными стрелками, седьмой в шестой с совпадающими стрелками, шестой во второй с противоположными стрелками. Запись $[2^{-}]$ означает, что второй средний кубик остался на месте, но повернулся на 180° .

Угловой кубик может расположиться на новом месте тремя способами. Соответственно в записи цикла после номера этого кубика будем ставить знак $+$, знак $-$ или ничего не писать. Знак не пишется, если горизонтальная грань данного углового кубика и после выполнения операции остается горизонтальной. В противном случае, чтобы привести эту грань на новом месте в горизонтальное положение, нам пришлось бы повернуть кубик вокруг диагонали на 120° . Если поворот должен производиться против часовой стрелки, ставим $+$, если по часовой стрелке —

ставим $-$. Скажем, записи (5^+) , (5) , (5^-) означают, что пятый кубик остается на месте, но поворачивается на 120° , 0° , 240° по часовой стрелке соответственно.

Пояснения к таблице (см. с. 24)

Записывая операцию, мы будем сначала писать последовательность поворотов (слово из букв Φ, T, B, H, P, L со степенями), затем знак \sim , а потом результат, записанный в виде циклов со знаками. Освоить эту систему записи вам помогут примеры; проверьте, что $P \sim (1^+2^-3^+4^-) [1234]$, $B^- \sim (1276) [2^-9^-8^-7^-]$, $\Phi^2 \sim (15) (46) [16] [57]$, $P\Phi \sim (1^+2^-3^-5^-6^+) (4^+) [1234567]$, $P^2\Phi^2 \sim (135) (264) [136] [24] [57]$.

В таблице приводятся 47 операций, найденных при игре в кубик, иногда методом проб и ошибок, но большей частью с помощью довольно интересных алгебраических рассуждений, которые недостаток места не позволяет воспроизвести здесь. Операции S_{15} и S_{19} заимствованы из «Венгерского среднешкольного журнала», S_{18} — из упомянутой выше статьи в «Науке и жизни».

Схема алгоритма

Первый этап: сборка «столбика» $2 \times 2 \times 3$. Назовем «столбиком» совокупность всех маленьких кубиков, не лежащих в двух смежных гранях большого куба, для определенности — Φ и P . Для правильной расстановки всех кубиков в «столбике» особых хитростей не требуется. Приведем, например, операции, при которых 1-й средний кубик переходит на 8-е место и в одном случае сохраняет, а в другом меняет свой угол поворота, причем все кубики «столбика», кроме, конечно, 8-го, остаются нетронутыми: $A_1 = PTV^2T^{-1}$, $A_2 = \Phi^{-1}TBT^{-1}$. Этот этап удается выполнить примерно за 25 ходов.

Второй этап: разворачивание средних кубиков в гранях Φ и P . Легко показать, что при любой последовательности поворотов число средних кубиков, у которых направления стрелок не совпадают с «правильным» (показанным на рисунке), всегда

Таблица полезных операций

Название, описание и результат операции	Число ходов
1) Перестановки средних кубиков:	
а) 3-циклы	
$C_1 = \Phi^{-1} P^{-1} \Phi P \sim [125] \cdot (1^+ 2^-) (45^-)$	4
$C_2 = \Phi^2 P^{-1} \Phi^2 P \sim [126] \cdot (1^+ 2^- 5^- 64^+)$	4
$C_3 = \Phi P^{-1} \Phi^{-1} P \sim [127] \cdot (1^- 4^-) (2^+ 6^+)$	4
$C_4 = \Phi^2 P^2 \Phi^2 P^2 \sim [136] \cdot (135)(264)$	4
$C_5 = P^{-1} \Phi^{-1} P^{-1} \Phi P^2 \sim [235] \cdot (1^+ 5^+) (2^- 3^-)$	5
$C_6 = P^{-1} \Phi^2 P^{-1} \Phi^2 P^2 \sim [236] \cdot (1^+ 2^- 35^+ 6^-)$	5
$C_7 = P^{-1} \Phi P^{-1} \Phi^{-1} P^2 \sim [237] \cdot (1^+ 2)(3^- 6)$	5
$C_8 = P^{-1} \Phi^{-1} P^2 \Phi P^{-1} \sim [245] \cdot (1243^- 5^+)$	5
$C_9 = P^{-1} \Phi^2 P^2 \Phi^2 P^{-1} \sim [246] \cdot (13^+ 6^-) (24^- 5^+)$	5
$C_{10} = \Phi^{-1} P^{-1} \Phi P^{-1} \Phi^{-1} P^2 \Phi \sim [123] \cdot (1^- 3)(2^- 4^-)$	7
б) 2-циклы	
$C_{11} = P^{-1} \Phi^{-1} P^{-1} \Phi P^{-1} \Phi^{-1} P^2 \Phi \sim [14](12^+ 34^-)$	8
$C_{12} = PNTPT^{-1}P^2H^{-1} \sim [12][3^-][4^-](24^+ 3)(1^+ 5^+)$	7
в) поворот средних кубиков	
$C_{13} = V\Phi^{-1}V^{-1}\Phi P^{-1}\Phi P\Phi^{-1} \sim [1^-][2^-](1^- 2^-) (46^-)$	8
г) перестановки средних кубиков, не сдвигающие угловых	
$C_{14} = P^2HV^{-1}\Phi^2VH^{-1} \sim [136]$	6
$C_{15} = VP^2L\Phi V^{-1}\Phi^{-1}L^{-1}T^{-1}P^{-1} \sim [1^- 2^- 7]$	10
$C_{16} = PVH^{-1}\Phi^{-1}HV^{-1} \sim [1^- 6^- 24^- 3]$	6
$C_{17} = (P^2\Phi^2)^3 \sim [24][57]$	6
$C_{18} = P^2\Phi^2P^2\Phi^2 \cdot PV^{-1}P^2V\Phi \cdot PV\Phi^2V^{-1}\Phi \sim [2^-][7^-]$	14
$C_{19} = P^{-1}VP^2L\Phi V^{-1}PV^{-1}P^{-1}\Phi^{-1}L^{-1}T^{-1}V \sim [2^-][7^-]$	14
2) Перестановки угловых кубиков, не сдвигающие средних	
а) 3-циклы	
$Y_1 = VLV^{-1} \cdot P^{-1} \cdot VL^{-1}V^{-1} \cdot P \sim (1^+ 2^+ 6^+)$	8
$Y_2 = L^{-1}TL \cdot \Phi^{-1} \cdot L^{-1}T^{-1}L \cdot \Phi \sim (12^- 6^+)$	8
$Y_3 = \Phi^2P^2\Phi \cdot L \cdot \Phi^{-1}P^2\Phi \cdot L^{-1}\Phi \sim (126)$	9
$Y_4 = L^2T^2L^{-1} \cdot \Phi^2 \cdot LT^2L^{-1} \cdot \Phi^2L^{-1} \sim (1^+ 26^-)$	9
$Y_5 = PV^2P \cdot H \cdot P^{-1}V^2P \cdot H^{-1}P^2 \sim (12^+ 6^-)$	9
$Y_6 = L^{-1}TV^2T^{-1}LT^{-1}V^2LT^{-1} \sim (1^- 2^- 6^-)$	10
$Y_7 = P^{-1}T^2P \cdot \Phi \cdot P^{-1}T^2P \cdot \Phi^{-1} \sim (1^+ 7^+ 4^+)$	8
$Y_8 = \Phi H\Phi^{-1} \cdot V^2 \cdot \Phi H^{-1}\Phi^{-1} \cdot V^2 \sim (17^+ 4^-)$	8
$Y_9 = \Phi^{-1} \cdot PT^{-1}P^{-1} \cdot \Phi \cdot PTP^{-1} \sim (1^- 74^+)$	8
$Y_{10} = H^2L^{-1}H^{-1}P^2H^2L^{-1}P^2H^{-1} \sim (1^- 7^+ 4)$	9
$Y_{11} = T^{-1}HT^{-1}P^2TH^{-1}T^{-1}HP^2H^{-1}T^2 \sim (174)$	11
$Y_{12} = P^2H^{-1}LHP^2H^{-1}L^{-1}H \sim (2^+ 4^- 6)$	8
$Y_{13} = V^{-1}Y_7V \sim (2^+ 4^+ 6^+)$	10
$Y_{14} = V^{-1}Y_{10}V \sim (246)$	11
б) разворачивание угловых кубиков	
$Y_{15} = (P\Phi^{-1}H^2\Phi P^{-1}V^2)^2 \sim (2^-)(6^+)$	12
$Y_{15}' = P^{-1}Y_{15}P \sim (6^+)(3^-)$	14
$Y_{15}'' = PY_{15}'P^{-1} \sim (1^-)(6^+)$	14
$Y_{16} = Y_9^{-1} \cdot Y_8 = PTP^{-1}P^{-1}\Phi^{-1}PTP^{-1}\Phi^2H\Phi^{-1}V^2\Phi H^{-1}\Phi^{-1}V^2 \sim (1^+)(4^+)(7^+)$	15
$Y_{16}' = P^{-1}Y_{16}P \sim (1^+)(2^+)(7^+)$	15
$Y_{16}'' = FY_{16}'F^{-1} \sim (1^+)(3^+)(7^+)$, здесь $F = \Phi H^{-1}\Phi^{-1}V^2$	15
$Y_{17} = (C_{13})^2 = (V\Phi^{-1}V^{-1}\Phi P^{-1}\Phi P\Phi^{-1})^2 \sim (1^+)(2^+)(4^-)(6^-)$	16
$Y_{18} = (C_3C_2)^2 = (\Phi P^{-1}\Phi^{-1}P\Phi^2P^{-1}\Phi^2P)^2 \sim (1^-)(2^+)(4^+)(5^+)(6^+)$	16
в) 3-циклы с разворачиванием	
$Y_{19} = L^{-1}TV^2T^{-1}LH^2TL^{-1}V^2LT^{-1}H^2 \sim (1^- 2^- 7^-) (3^-) (5^+)$	12
$Y_{20} = (C_{12})^2 = (PNTPT^{-1}P^2H^{-1})^2 \sim (2^+ 34^+) (1^-) (5^-)$	14
г) пары 2-циклов	
$Y_{21} = (C_1)^3 = (\Phi^{-1}P^{-1}\Phi P)^3 \sim (1^- 2^+)(4^- 5^+)$	12
$Y_{22} = (C_3)^3 = (\Phi P^{-1}\Phi^{-1}P)^3 \sim (14)(26)$	12
$Y_{23} = C_{17}P^{-1} = (\Phi^2P^2)^2\Phi^2P(\Phi^2P^2)^2\Phi^2P \sim (13)(24)$	12
$Y_{24} = (C_{11})^2 = (P^{-1}\Phi^{-1}P^{-1}\Phi P^{-1}\Phi^{-1}P^2\Phi)^2 \sim (1^+ 3^-)(2^+ 4^-)$	16

четно. Поэтому после первого этапа в гранях Φ и P может находиться 2, 4 или 6 таких кубиков. Операция $A_3 = HP^{4-n}H^{-1}$ ($n = 1, 2, 3$) «исправляет стрелки» у двух кубиков — 5-го

и n -го, а операция $A_4 = HV^{-1}PVH^{-1}$ — у четырех (1-, 3-, 5- и 7-го), при этом все кубики «столбика» остаются на местах. Применяя операции типа A_3 и A_4 , мы добиваемся того, что стрел-

ки всех средних кубиков будут направлены правильно. Для этого нужно не более 8 ходов.

Третий этап: расстановка средних кубиков. На этом этапе будут поворачиваться только грани Φ и Π , поэтому «столбик» и правильные направления стрелок средних кубиков автоматически сохраняются. Можно доказать (это легко делает каждый, кто знаком с понятием перестановки), что необходимое для этого передвижение 7 средних кубиков записывается в виде композиции не более трех циклов длины 3 и, возможно еще одного поворота; следовательно, 7 средних кубиков граней Φ и Π можно правильно расставить, используя не более трех операций типа $C_1—C_{10}$. Более подробный анализ показывает, что этот этап требует не более 14 ходов.

Четвертый этап: расстановка и разворачивание угловых кубиков. Нам осталось расставить и правильно развернуть 6 угловых кубиков граней Φ и Π . Как выше, можно установить, что необходимое передвижение 6 угловых кубиков записывается в виде композиции не более трех циклов длины 3, поэтому для правильной расстановки 6 угловых кубиков нам потребуется не более трех операций типа $Y_1—Y_{14}$. После этого можно, применяя операции $Y_{15}—Y_{18}$, пра-

вильно повернуть все кубики. Действительно, повернув два кубика с помощью Y_{16} , мы всегда можем уменьшить число неправильно развернутых кубиков на 1 или 2, пока оно больше двух. Когда же останется два таких кубика, они окажутся повернуты в противоположные стороны, и их правильный разворот достигается снова с помощью Y_{16} , Y'_{16} или Y''_{16} . Гораздо рациональнее, пользуясь нашим богатым запасом 3-циклов угловых кубиков, расставлять и разворачивать их одновременно: среди операций, осуществляющих перестановку данных трех кубиков, всегда можно выбрать одну так, чтобы два из них повернулись на нужные нам углы. Не вдаваясь в детали, отметим, что для 4-го этапа хватает 32 ходов и это число наверняка может быть уменьшено.

Итак, общее число ходов в предлагаемом алгоритме теоретически не превосходит 79, но на практике оно оказывается меньше — около 70.

В одном из следующих номеров журнала мы глубже познакомимся с математикой волшебного кубика. Это позволит нам полностью обосновать приведенный выше алгоритм и рассказать о рекордно коротком (по имеющемуся данным) алгоритме — на 52 хода.